

Аппроксимация выборки случайных чисел методом наименьших квадратов

Пусть надо аппроксимировать случайную выборку значений f_i в точках x_i . Если предполагается, что вид нашей выборки приблизительно линейный, то в качестве аппроксимационной зависимости можно выбрать линейную функцию $y = a \cdot x + b$.

Получим коэффициенты a и b методом наименьших квадратов.

Запишем сумму квадратов отклонений нашей функции f_i от аппроксимационных значений $y_i = a \cdot x_i + b$

$$S = \sum (ax_i + b - f_i)^2 \quad (1)$$

Сумма квадратов отклонений S зависит от коэффициентов a и b . Нам необходимо найти такие a и b , при которых S минимально. Запишем условия минимума функции $S(a, b)$ по переменным a и b :

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0 \quad (2)$$

Из условий (2) следуют два уравнения на коэффициенты a, b .

$$a \cdot \sum_i x_i^2 + b \sum_i x_i - \sum_i f_i \cdot x_i = 0 \quad (3)$$

$$a \cdot \sum_i x_i + N \cdot b - \sum_i f_i = 0 \quad (4)$$

Из системы (3), (4) легко получить значения коэффициентов a и b .

Пример алгоритма аппроксимации выборки случайных чисел методом наименьших квадратов на естественном языке:

1. Задаем начальные данные для аппроксимации: границы отрезка x_0 и x_n , количество узлов координатной сетки n , шаг сетки h , массив значений координат сетки $z(n)$ и массив значений выборки случайных чисел $f(n)$.

2. Графически изображаем выборки случайных чисел $f(n)$ на отрезке от x_0 до x_n с шагом sh .
3. Задаем нулевые значения вспомогательным переменным $s_1=0, s_2=0, s_3=0, s_4=0, s_5=0$.
4. Задаем цикл по i от 1 до n .
5. Вычисляем в цикле $s_1=s_1+x(i)^2; s_2=s_2+x(i); s_3=s_3-f(i)*x(i); s_5=s_5-f(i)$.
6. Конец цикла по i .
7. Задаем $s_4=s_2$.
8. Вычисляем коэффициенты прямой a и b : $a=-(s_3/s_2-s_5/n)/(s_1/s_2-s_4/n)$ и $b=s_3/s_2-a*s_1/s_2$.
9. Вычисляем значение аппроксимирующей прямой в точках x_0 и x_n : $f_1=a*x_0+b$ и $f_2=a*x_n+b$.
10. Графически изображаем аппроксимирующую прямую.
11. Выводим на экран значения коэффициентов прямой a и b .
12. Конец программы.

Пример реализации линейной аппроксимации выборки случайных чисел методом наименьших квадратов на VFP:

```

SET DECIMALS TO 10
n=100
DIMENSION f(n), z(n)
h=0.1

FOR i=1 TO n
z(i)=(i-1)*h
x=z(i)
f(i)=func1(x)
ENDFOR

x0=0.05
xn=2

sh=0.05

x1=x0
f1 = func1(x1)

```

```

_screen.Cls

FOR x=x0 TO xn STEP sh
x2=x+sh
f2 = func1(x2)
_screen.Line(xe(x1),ye(f1),xe(x2),ye(f2))
x1=x2
f1=f2
ENDFOR

a=0
b=0
метод_наименьших_квадратов(@f,@z,n,@a,@b)

f1=a*x0+b
f2=a*xn+b

_screen.Line(xe(x0),ye(f1),xe(xn),ye(f2))

? a,b

procedure метод_наименьших_квадратов
PARAMETERS f,x,n,a,b
s1=0
s2=0
s3=0
s4=0
s5=0

FOR i=1 TO n
s1=s1+x(i)^2
s2=s2+x(i)
s3=s3-f(i)*x(i)
s5=s5-f(i)
ENDFOR

s4=s2
a=-(s3/s2-s5/n)/(s1/s2 -s4/n)
b=-s3/s2-a*s1/s2
RETURN

FUNCTION func1
PARAMETERS x
RETURN 2*x+0.5+0.4*RAND()

FUNCTION xe
PARAMETERS x
RETURN 50 + x*400

FUNCTION ye

```

```
PARAMETERS y
RETURN 400 - y*150
```

Данная реализация алгоритма для графического изображения значений выборки случайных чисел $f(x)$ и аппроксимирующей прямой использует метод `line(x1, y1, x2, y2)` объекта `_screen`.

Пример реализации линейной аппроксимации выборки случайных чисел методом наименьших квадратов на VBA:

```
Sub MNK_Test()
Dim f(100), z(100)

Set xlSheet = Application.ActiveSheet

n = 100
h = 0.1

For i = 1 To n
z(i) = (i - 1) * h
x = z(i)
f(i) = func1(x)
Next i

x1 = 0.05
f1 = func1(x1)
sh = 0.05
xlSheet.Cells(1, 1).Value = x1
xlSheet.Cells(1, 2).Value = f1
i = 1
For x = 0.05 To 2 Step sh
i = i + 1
x1 = x + sh
f1 = func1(x1)
xlSheet.Cells(i, 1).Value = x1
xlSheet.Cells(i, 2).Value = f1
Next x

a = 0
b = 0

MNK f, z, n, a, b

x1 = 0.05
f2 = a * x1 + b
xlSheet.Cells(1, 3).Value = f2
```

```

i = 1
For x = 0.05 To 2 Step sh
i = i + 1
f2 = a * x + b
xlSheet.Cells(i, 3).Value = f2
Next x

Debug.Print "a= " & Format(a, "00.000 000 000") & " : b= "
& Format(b, "00.000 000 000")

Call AddChart("C1", "C2", "C3")

End Sub

Sub MNK(fd, xd, n, a, b)

s1 = 0
s2 = 0
s3 = 0
s4 = 0
s5 = 0

For i = 1 To n
s1 = s1 + xd(i) ^ 2
s2 = s2 + xd(i)
s3 = s3 - fd(i) * xd(i)
s5 = s5 - fd(i)
Next i

s4 = s2

a = -(s3 / s2 - s5 / n) / (s1 / s2 - s4 / n)
b = -s3 / s2 - a * s1 / s2

End Sub

Function func1(x)
func1 = 2 * x + 0.5 + 0.4 * Rnd()
End Function

Sub AddChart(Col1, Col2, Col3)

ASheetName = Application.ActiveSheet.Name

Charts.Add
ActiveChart.ChartType = xlXYScatterSmooth
' ActiveChart.SetSourceData
Source:=Sheets(ASheetName).Range("A1")
ActiveChart.SeriesCollection.NewSeries
ActiveChart.SeriesCollection.NewSeries

```

```

        ActiveChart.SeriesCollection(1).XValues = "=" &
ASheetName & "!" & Col1
        ActiveChart.SeriesCollection(1).Values = "=" &
ASheetName & "!" & Col2
        ActiveChart.SeriesCollection(1).Name = ""f(x)""
        ActiveChart.SeriesCollection(2).XValues = "=" &
ASheetName & "!" & Col1
        ActiveChart.SeriesCollection(2).Values = "=" &
ASheetName & "!" & Col3
        ActiveChart.SeriesCollection(2).Name = ""g(x)""
        ActiveChart.Location Where:=xlLocationAsObject,
Name:=ASheetName
        ActiveChart.SeriesCollection(2).ChartType =
xlXYScatterSmoothNoMarkers
        ActiveChart.SeriesCollection(1).Select
        ActiveChart.ChartArea.Select

End Sub

```

В данной реализации для графического изображения значений выборки случайных чисел $f(x)$ и аппроксимирующей прямой ($g(x)$) используются средства построения графиков MS EXCEL. Значения x , $f(x)$ и $g(x)$ заносятся в ячейки первых трех колонок рабочего листа:

```

xlSheet.Cells(i, 1).Value = x1
xlSheet.Cells(i, 2).Value = f1
xlSheet.Cells(i, 3).Value = g1

```

и в конце программы для построения графика вызывается метод `AddChart(Col1, Col2, Col3)`.